BEITRÄGE

ZUR

BESTIMMUNG UND VERWERTUNG DER BEWEGUNG DER ERDE UM DEN SCHWERPUNKT DES SYSTEMS ERDE-MOND.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VON DER

PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

FRIEDRICH - WILHELMS - UNIVERSITÄT ZU BERLIN

GENEHMIGT

UND

NEBST DEN BEIGEFÜGTEN THESEN

ÖFFENTLICH ZU VERTHEIDIGEN

AM 17. DEZEMBER 1891

VON

KURT LAVES

AUS LYCK, PROVINZ OST-PREUSSEN

OPPONENTEN:

KARL NECKER, CAND. MATH. ET ASTRON.

LOUIS ARNDT, ASTRONOM DER KGL. STERNWARTE ZU BERLIN.

VICTOR WELLMANN, DR. PHIL., ASTRONOM DER KGL. STERNWARTE ZU BERLIN

BERLIN 1891.

Druck: George Chasté, Berlin C., Rosenthalerstr. 36.

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

Seinem hochverehrten Lehrer

dem Königl. Geheimen Regierungs-Rat

Herrn Professor Dr. W. Foerster,

Director der Königl. Sternwarte zu Berlin

in

dankbarer Hochachtung

gewidmet

vom Verfasser.

Einleitung.

Die schönen Heliometer-Beobachtungen des Mars in seiner Opposition im Jahre 1877, welche Herr Gill in Ascension ausführte, und die eine sehr günstige Bestimmung der Sonnenparallaxe lieferten, legten es nahe, sie noch für andere Untersuchungen nutzbar zu machen. Da sich diese Beobachtungen nämlich über zwei Mondumläufe erstreckten, waren sie sehr geeignet, einen Beitrag zur Bestimmung der halben grossen Axe jener Bahn zu liefern, welche der Erdmittelpunkt um den Schwerpunkt des Systems Erde-Mond beschreibt; denn offenbar musste sich diese kleine Oscillation der Erde besonders deutlich in den beobachteten geocentrischen Marsorten spiegeln.

Auf diese Aufgabe von Herrn Professor Dr. Foerster hingewiesen, beschäftigte ich mich eingehender mit diesem Thema und kam dabei, nachdem es mir gelungen war, die Beobachtungen in befriedigender Weise zur Bestimmung der halben grossen Axe jener Bahn zu verwerten, überhaupt auf die Frage der Bestimmung und Verwertung dieser Bewegung in der modernen Astronomie. Verwertet war diese Bewegung zur Herleitung der Sonnenparallaxe, doch wichen in den Angaben derselben, wie sie aus dieser Erscheinung abgeleitet worden waren, die Autoren so bedeutend von einander ab, dass diese Unterschiede in systematischen Fehlerquellen ihren Grund haben mussten. Die Gleichung, welche diesen Bestimmungen zu Grunde lag, die sogenannte lunare Gleichung, hat nämlich bei den einzelnen Autoren in ihren numerischen Coefficienten wesentlich verschiedene Gestalt, die durch die jeweilige abweichende analytische Form derselben bedingt war. Diese Abweichungen sollten erklärt, die wahre Form der Gleichung dargestellt und durch mathematische Über-

legung erörtert werden, zu welchen Bestimmungen die Bewegungsgleichung für jene Oscillation zu verwerten sei.

Um nun den gedanklichen Weg, den ich in der nachfolgenden Arbeit verfolgt habe, hier näher darzulegen, so habe ich im ersten Kapitel zuerst die Differentialgleichungen der Bewegung der Erde um den Schwerpunkt des Systems Erde-Mond abgeleitet und gezeigt, wie man die sechs Elemente der Bahn zu erhalten vermag; nachdem dann kurz der Einfluss besprochen ist, den die Dimensionen dieser Bahn auf die Translationsbewegung jenes Systemschwerpunktes um die Sonne haben, ist am Ende des Kapitels die eigentliche lunare Gleichung, welche den folgenden Untersuchungen zu Grunde liegt, abgeleitet.

Im zweiten Kapitel wird nach einem kurzen Überblick über die verschiedenen Werte der mittleren Sonnenparallaxe π, welche aus der lunaren Gleichung abgeleitet sind, zunächst diese Gleichung so umgeformt, um zu einer Bestimmung von π dienen zu können, dann werden die einzelnen in der Gleichuug auftretenden Factoren genau discutiert und ihre Werte nach besten neuesten Bestimmungen abgeleitet. Dabei stellt sich dann heraus, dass die von den Autoren angeführte Form der Gleichung fehlerhaft war, und aus der totalen Differentiation der Gleichung ergiebt sich dann einmal der Unterschied zwischen den Haupt-Autoren Le Verrier und Newcomb in dem Werte von π, und dann folgt aus den einzelnen partiellen Differentialquotienten ein Gesetz für die beste Verwendung der lunaren Gleichung. Darnach ist dieselbe zu einer Bestimmung von π ungeeignet, wohl aber vermag sie zu einer Bestimmung der Mondmasse zu dienen.

Im dritten und letzten Kapitel ist nach einleitenden Betrachtungen über die Gill'schen Beobachtungen die Bestimmung der sogenannten Constanten der lunaren Gleichung, d. h. der halben grossen Axe jenes Epicycels bezogen auf die halbe grosse Axe der jährlichen Erdbahn, in Winkelmass ausgedrückt, aus 21 Bestimmungsgleichungen vorgenommen und der Wert derselben $= 6''.53 \pm 0''.05$ bestimmt, ein Wert, der in guter Übereinstimmung mit den besten früheren Wertangaben steht.

Capitel I.

Ableitung der Bewegungsgleichungen. — Einfluss der Dimensionen des Systems Erde-Mond auf die Bewegung der Erde um die Sonne; die lunare Gleichung.

Nach dem allgemeinen Gravitationsgesetze beschreibt unter der Annahme, dass Erde und Mond einen starren Körper zusammen bildeten, der Schwerpunkt dieses Systems eine nahezu elliptische Bahn um die Sonne als Centralkörper, während Erde und Mond, für sich allein betrachtet, um ihren gemeinsamen Schwerpunkt beide in gleicher Zeit ähnliche Bahnen durchlaufen. Der Systemschwerpunkt liegt nun, da die Masse des Mondes nur $\frac{1}{81}$ der Erdmasse ist, nahe bei dem Centrum der Erde — wir können Erdschwerpunkt und Erdmittelpunkt als zusammenfallend annehmen —, die Bahn, welche dieser Punkt um den Schwerpunkt des Systems beschreibt, wird daher im Verhältnis zu der Bahn des Trabanten, der ja etwa 60 Erdradien vom Centrum der Erde entfernt ist, nur kleine Dimensionen haben. In der That hat sich aus den Beobachtungen ergeben, dass der Winkel, unter dem die halbe grosse Axe dieser Ellipse in der mittleren Entfernung von der Sonne gesehen wird, nur $6''.50$ beträgt. Nennt man die halbe grosse Axe dieser Bahn α und nimmt als Wert der mittlern Horizontal-Aequatoreal-Parallaxe der Sonne $\pi = 8''.78$ an, wie ihn die Marsbeobachtungen in der Opposition von 1877 ergeben haben (cf. D. Gill, Account of a Determination of the Solar Parallax from Observations of

Mars, made at Ascension in 1877, Memoirs of the Royal Astronomical Society Vol XLVI 1880—81), so ist, wenn noch a die halbe grosse Axe der Erdbahn, R den Aequatorealhalbmesser des Erdsphäroids bezeichnen:

$$\pi = 8''.\,78 = \frac{R}{a}$$

$$P = 6''.\,50 = \frac{\alpha}{a}.$$

Durch Division beider Ausdrücke folgt:

$$\alpha = \frac{6\,.\,50}{8\,.\,78}\,R = 0\,.\,74\,R.$$

Es liegt somit der Schwerpunkt des Systems Mond-Erde noch innerhalb der Figur der Erde und zwar etwa $\frac{1}{4}$ R von der Oberfläche in mittlerer Lage entfernt.

Wegen des störenden Einflusses der Sonne ist nun die Annahme einer elliptischen Bewegung des Erdschwerpunktes um den gemeinsamen Schwerpunkt des Systems Erde-Mond nur näherungsweise richtig, um die Bahn mit aller Strenge zu bestimmen, müssen wir die Differentialgleichungen der Bewegung aufstellen. Wir wollen hierbei die Bezeichnungen so wählen, wie sie Le Verrier im 4. Bande der Annales de l'Observatoire impérial de Paris, pag. 43, gebraucht hat; er behandelt dort den störenden Einfluss des Mondes auf die Bahn der Erde um die Sonne; hierauf werden wir später noch eingehen.

Es seien in bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinationssystem:

X, Y, Z die Coordinaten des Sonnencentrums ⊙.

$X + x$, $Y + y$, $Z + z$ die Coordinaten des Schwerpunkts S des Systems Erde-Mond,

$X + x + \xi$, $Y + y + \eta$, $Z + z + \zeta$ die Coordinaten des Centrums T der Erde,

$X + x + \xi^1$, $Y + y + \eta^1$, $Z + z + \zeta^1$ die Coordinaten des Centrums L des Mondes,

Δ, r, r^1, δ^1 die respectiven Distanzen ⊙S, ⊙T, ⊙L, TL,

ϱ, ϱ^1 die Distanzen der Erde und des Mondes von ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkt S,

M, m, m^1 die Massen von Sonne, Erde, Mond.

Alsdann gelten die Gleichungen:

$$\text{I.}\quad \frac{d^2 X}{dt^2} = k^2 \frac{m(x+\xi)}{r^3} + k^2 \frac{m'(x+\xi')}{r'^3}$$

$$\text{II.}\quad \frac{d^2(X+x+\xi)}{dt^2} = -k^2 \frac{M(x+\xi)}{r^3} - k^2 \frac{m'(\xi-\xi')}{\delta'^3}$$

$$\text{III.}\quad \frac{d^2(X+x+\xi')}{dt^2} = -k^2 \frac{M(x+\xi')}{r'^3} + k^2 \frac{m(\xi-\xi')}{\delta'^3}.$$

Die übrigen 6 Gleichungen folgen aus diesen, indem man

X durch Y und Z
x „ y „ z
ξ „ η „ ζ
ξ' „ η' „ ζ'

ersetzt. Bildet man II—I und III—I, so ergeben sich die Gleichungen der relativen Bewegung von T und L in bezug auf S.

$$\text{II}^a\quad \frac{d^2(x+\xi)}{dt^2} = -k^2 \frac{(M+m)(x+\xi)}{r^3} - \frac{k^2 m'(x+\xi')}{r'^3} - \frac{k^2 m'(\xi-\xi')}{\delta'^3}$$

$$\text{III}^a\quad \frac{d^2(x+\xi')}{\delta t^2} = -k^2 \frac{(M+m')(x+\xi')}{r'^3} - \frac{k^2 m(x+\xi)}{r^3} + \frac{k^2 m(\xi-\xi')}{\delta'^3},$$

multiplicieren wir die erste Gleichung mit m, die zweite mit m' und addieren sie, indem wir daran denken, dass nach der Definition des Schwerpunkts $m\xi + m'\xi' = 0$ ist, so sind:

$$\text{IV.}\quad (m+m')\frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 m(M+m+m')\frac{(x+\xi)}{r^3} - k^2 m'(M+m+m')\frac{(x+\xi')}{r'^3}$$

damit haben wir die Differentialgleichung der Bewegung des Schwerpunkts S, von welcher Le Verrier ausgeht; da wir nun hier nach dem störenden Einfluss der Sonne auf die Bewegung des Erdschwerpunkts um den Punkt S fragen, bilden wir die Differentialgleichung der Bewegung des Erdcentrums

in bezug auf S durch Subtraction der letzten Gleichung IV von II^a, und erhalten:

$$1.\quad \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{k^2(x+\xi)}{r^3}\frac{M\,m}{m+m^1} + \frac{k^2(x+\xi^1)}{r^{1\,3}}\frac{M\,m^1}{m+m^1} - k^2\frac{(\xi-\xi^1)}{\delta^{1\,3}}\,m^1$$

Setzen wir nun $\Omega = \frac{1}{\delta^1} + \frac{M}{m+m^1}\left\{\frac{1}{r} - \frac{1}{r^1}\right\}$

so lauten die Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = k^2\,m^1\,\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\xi}$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = k^2\,m^1\,\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\eta}$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = k^2\,m^1\,\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\zeta},$$

nennen wir den zweiten Teil von Ω, der von der Wirkung der Sonne herrührt,

$$\Omega^1 = \frac{M}{m+m^1}\left\{\frac{1}{r} - \frac{1}{r^1}\right\} \text{ so wird also } \Omega = \frac{1}{\delta^1} + \Omega^1.$$

Wenn wir nun in erster Näherung den Einfluss der Sonne vernachlässigen, also $\Omega^1 = 0$ setzen, so erhalten wir die Gleichungen in der Form:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + k^2\frac{(\xi-\xi^1)}{\delta^{1\,3}}\,m^1 = 0$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + k^2\frac{(\eta-\eta^1)}{\delta^{1\,3}}\,m^1 = 0$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + k^2\frac{(\zeta-\zeta^1)}{\delta^{1\,3}}\,m^1 = 0.$$

Die Bahn wird dann eine Ellipse sein, und die sechs Elemente derselben werden uns erste Näherungen für die thatsächlich stattfindenden Elemente liefern. Durch die Variation der Constanten können wir dann die von der Sonne herrührende Störung in Rechnung stellen und so direct für den jeweiligen Zeitmoment die osculierenden Elemente der

Bahn ableiten. Wir brauchen jedoch auf dieses Verfahren, bei dem wir auf eine ziemlich langwierige Entwicklung der Störungsfunction Ω kommen würden, nicht näher einzugehen, da wir durch die sehr ausgebildete Mondtheorie, d. h. die Theorie der relativen Bewegung des Mondes um den Erdmittelpunkt, ein Mittel haben, die Veränderung der Elemente unserer Bahn genügend streng darzustellen Denn nach der Definition des Systemschwerpunktes ist $m\varrho = m^1 \varrho^1$, beiderseits $m^1\ \varrho$ addiert, ergiebt $\varrho\ (m + m^1) = m^1\ \delta^1$ oder wenn $\mu = \frac{m^1}{m}$ gesetzt wird, wodurch wir also die Mondmasse in Einheiten der Erdmasse ausgedrückt haben,

$$\varrho \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) = \delta^1.$$

Da μ und δ^1 bekannt sind, kann man aus dieser Gleichung den jeweiligen Radius vector unserer Bahn ϱ finden; wenn im speciellen Falle

1. $\delta^1 = a^1\ (1 - e^1)$ ist, so wird $\varrho = \alpha\ (1 - \varepsilon)$, wenn
2. $\delta^1 = a^1\ (1 + e^1)$ „ „ „ $\varrho = \alpha\ (1 + \varepsilon)$,

wo ε die Excentricität der Bahn der Erde um S ist. Setzen wir diese Werte in unsere Gleichung ein, so wird

bei Fall 1. $\alpha\ (1 - \varepsilon) \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) = a^1\ (1 - e^1)$

bei Fall 2. $\alpha\ (1 + \varepsilon) \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) = a^1\ (1 + e^1)$,

daraus folgt $\varepsilon = e^1$ und $\alpha = a^1 \frac{\mu}{1 + \mu}$, offenbar sind Neigung und Knoten unserer Bahn dieselben, wie bei der relativen Mondbahn.

Nachdem wir nun die Dimensionen der Bahn des Erdcentrums um den Schwerpunkt des Systems Erde - Mond und die Form der Differentialgleichungen discutiert haben, soll jetzt der Einfluss besprochen werden, den die Dimensionen des Systems auf die Translationsbewegung des Systemschwerpunktes um die Sonne hervorbringen.

Le Verrier hatte die Elemente der Bahn, welche der Schwerpunkt des Systems Erde-Mond um die Sonne in einem Jahre beschreibt, zuerst unter der Annahme abgeleitet, dass die Massen von Erde und Mond in S wirklich concentriert wären, da nun aber Erde und Mond isolierte Massen darstellen, deren Schwerpunkt S ist, mussten infolge der Dimensionen des Systems, Störungen für die Elemente der Bahn sich ergeben. Um diese zu finden, geht Le Verrier von der Differentialgleichung, die wir oben mit No. IV bezeichnet haben, aus:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k^2 m}{m + m^1} \nu \frac{x + \xi}{r^3} - \frac{k^2 m^1}{m + m^1} \nu \frac{x + \xi^1}{r^{1 3}},$$

wo $\nu = M + m + m^1$ gesetzt ist.

Nennen wir nun $\Omega_1 = \frac{1}{m + m^1} \left\{ \frac{m}{r} + \frac{m^1}{r^1} \right\}$, so werden die Differentialgleichungen der Bewegung von S um die Sonne

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = k^2 \nu \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = k^2 \nu \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} = k^2 \nu \frac{\partial \Omega_1}{\partial z},$$

setzt man nun $\Omega_1 = \frac{1}{\Delta} + \Omega^1{}_1$, so wird hier $\Omega^1{}_1$, die durch die Gegenwart des Mondes bedingte Störungsfunction darstellen, aus der die Störungen der Elemente der Bahn von S um die Sonne folgen. Le Verrier zeigt nun l. c. pag. 46, dass von den säcularen Störungen nur die für die Länge des Perihels der Erde merklich wird, und dass die periodischen Ungleichheiten ganz zu vernachlässigen sind.

In den astronomischen Tafelwerken werden die Coordinaten der Sonne in Länge, Breite und Radius vector geocentrisch angegeben, da nun aber nicht der Mittelpunkt der Erde, sondern der Schwerpunkt S des Systems Erde-Mond sich in der Ekliptik bewegt, so hat man bei der Tabulierung jedesmal eine Transformation von dem der Theorie zu Grunde liegenden Punkt S auf den für die Tafeln geltenden Fundamentalpunkt T — = Erdcentrum — ausgeführt. Wir betrachten hierbei also die Dimensionen der Bahn der Erde um S von der Sonne aus und werden, wenn wir die Ekliptical-

Coordinaten der Erde λ, s, r zu Grunde legen, die Correctionsgrössen $\delta\lambda$, δs, δr, die uns ermöglichen, von S auf T überzugehen, abzuleiten haben. Legen wir, wie es auch Le Verrier thut, ein rechtwinkliges Coordinatensystem durch S, wählen als x Axe die Linie S ☉ und nennen die Erdcoordinaten $x_1\ y_1\ z_1$, die Mondcoordinaten $x^1\ y^1\ z^1$. so wird:

a) $\delta r = x \quad \delta\lambda = \dfrac{y}{r \sin 1''} \quad \delta s = \dfrac{z}{r \sin 1''}$, nun ist:

b) $x = -\dfrac{m^1}{m} x^1 \qquad y = -\dfrac{m^1}{m} y^1 \qquad z = -\dfrac{m^1}{m} z^1$, bezeichnen ferner l^1, b^1, δ^1 die geocentrischen Ekliptical-Coordinaten des Mondes, dann wird

c) $\begin{cases} x^1 = \varrho^1 \cos b^1 \cos (l^1 - \lambda) \\ y^1 = \varrho^1 \cos b^1 \sin (l^1 - \lambda) \\ z^1 = \varrho^1 \sin b^1, \end{cases}$

andrerseits war $\varrho^1 = \dfrac{m}{m + m^1} \delta^1$, daher wird

d) $\begin{cases} x^1 = \dfrac{m}{m + m^1} \delta^1 \cos b^1 \cos (l^1 - \lambda) \\ y^1 = \dfrac{m}{m + m^1} \delta^1 \cos b^1 \cos (l^1 - \lambda) \\ z^1 = \dfrac{m}{m + m^1} \delta^1 \sin b^1, \end{cases}$

setzt man die Gleichungen d) und b) in a) ein, so folgt

e) $\begin{cases} \delta r = -\dfrac{m^1}{m + m^1} \delta^1 \cos b^1 \cos (l^1 - \lambda) \\ \delta\lambda = -\dfrac{m^1}{m + m^1} \dfrac{\delta^1}{r} \dfrac{\cos b^1 \sin (l^1 - \lambda)}{\sin 1''} \\ \delta\beta = -\dfrac{m^1}{m + m^1} \dfrac{\delta^1 \sin b^1}{r \sin 1''}. \end{cases}$

Es interessiert uns im folgenden speciell die zweite Gleichung; bedenkt man nun, dass $\lambda = 180 + ☉$ und $l^1 = ☾$ und endlich $\dfrac{m^1}{m} = \mu$ ist, wo ☉ die Länge der Sonne, ☾ die Länge des Mondes bezeichnet, so wird die zweite Gleichung lauten:

$$\delta\lambda = \frac{\mu}{1 + \mu} \frac{\delta^1}{r} \frac{\cos b^1 \sin (☾ - ☉)}{\sin 1''},$$

übrigens kann man diese Relation noch auf einfachere Weise, als es oben geschehen ist, ableiten; wenn wir nämlich von der Gleichung $m\varrho = m^1 \varrho^1$ ausgehen, so folgt $(m + m^1)\ \varrho = m^1\ \delta^1$, oder $(m + m^1)\ \frac{\varrho}{r} = \frac{m^1\ \delta^1}{r}$, projiciert man nun das Dreieck T S ☉ auf die Ekliptik, so folgt unmittelbar:

$$\varrho = \frac{r \sin \delta\lambda}{\cos b^1 \sin (☾ - ☉)}.$$

Dies in die letzte Gleichung eingesetzt, ergiebt, wenn man noch bedenkt, dass $\delta\lambda$ stets ein kleiner Winkel ist, so dass daher $\sin \delta\lambda = \delta\lambda \sin 1''$ gesetzt werden kann:

$$\delta\lambda = \frac{\mu}{1+\mu}\ \frac{\delta^1}{r}\ \frac{\cos b^1 \sin (☾ - ☉)}{\sin 1''}$$

Diese Gleichung hat man im speciellen die lunare Gleichung genannt, sie wird im Folgenden den Ausgangspunkt aller unserer weiteren Betrachtungen bilden. Wir haben dieselbe erst an diesem Orte abgeleitet, weil uns erst die vorhergehenden Besprechungen ein deutliches Bild von der Natur der ganzen Erscheinung geben sollten.

Capitel II.

Folgerungen aus der lunaren Gleichung.

Bestimmung der Sonnenparallaxe; Abhängigkeit der einzelnen Elemente der lunaren Gleichung von einander; Aufklärung der Differenz zwischen Le Verrier und Newcomb bei der Bestimmung von π; beste Verwertung der lunaren Gleichung.

Nachdem Encke durch genauere Discussion der Beobachtungen der beiden Venusdurchgänge im 18. Jahrhundert für die mittlere Aequatoreal-Horizontalparallaxe der Sonne den Wert $\pi = 8''.57$ abgeleitet hatte, wurde dieser lange Jahre hindurch, als sehr genau bestimmt, allgemein angenommen, bis Hansen aus seiner Mondtheorie darauf hinwies, dass

dieser Wert der Parallaxe unbedingt zu klein sein müsse und seinerseits einen Wert von 8″. 92 ableitete. Darauf sind zahlreiche Bestimmungen von π vorgenommen, die auf sehr verschiedenen Methoden beruhen und die die Richtigkeit der Hansen'schen Behauptung bestätigten, da sie sämmtlich den Betrag von π zwischen den Grenzen 8″. 7 bis 9″. 0 ergaben. Le Verrier war es, der zuerst auch die lunare Gleichung der Erde zur Bestimmung von π heranzog und hiermit $\pi = 8''.95$ berechnete (Mémoires de l'Observatoire impérial de Paris Tome IV pag. 100). Im Jahre 1867 fasste Newcomb (Investigation of the distance of the Sun and of the elements which depend upon it, Astronomical and meteorological Observations made at the United States Naval Observatory during the year 1865, 1867 Appendix II) die Resultate, welche sich aus den verschiedenen Methoden für π ergaben, zusammen und ging auch auf den Gedanken Le Verrier's ein, π aus der lunaren Gleichung zu bestimmen, fand aber dabei einen wesentlich verschiedenen Wert, nämlich 8″. 81. Ein Jahr später machte Herr E. J. Stone in Oxford (Monthly Notices of the Royal astronomical Society Band XXVIII pag. 21 ff.) auf diese Discrepanz zwischen Le Verrier und Newcomb aufmerksam und zeigte, dass bei Le Verrier ein rechnerischer Fehler in der Bestimmung der Mondmasse, welche Le Verrier statt zu $\frac{1}{81 \cdot 48}$ zu $\frac{1}{81 \cdot 84}$ gefunden hatte, einen um 0″. 04 zu hohen Wert von π bedingte, so dass der corrigierte Le Verrier'sche Wert 8″. 91 wurde. Die übrig bleibende Differenz von 0″. 10 zwischen Le Verrier und Newcomb beruht auf den verschiedenen Annahmen in den von den beiden Autoren angewandten Elementen; Herr E. J. Stone findet speciell zwei Ursachen für diese Differenz, 1. hat Newcomb eine wesentlich andere Mondmasse als die corrigierte Le Verrier's, 2. weichen beide in einem constanten Factor, der von der Mondparallaxe abhängt, stark von einander ab, und Herr E. J. Stone giebt an, dass hierbei Newcomb einen Fehler begangen habe. In neuster Zeit hat noch Herr Harkness die lunare Gleichung einer Besprechung unter-

zogen in seiner Arbeit: On the relative accuracy of different methods of determining the solar Parallax (Journal of Science Vol. XXII 1881 Nov.). Je nach den verschiedenen Annahmen, die man betreffs der Mondmasse und der Constanten der lunaren Gleichung macht, findet er folgende Werte für π:

Mond-masse	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{82}$	$\frac{1}{83}$
P = 6″.50	8.664	8.770	8.878	8.985
6″.51	.678	.780	.892	.999
6″.56	.744	.851	.960	9.068

doch giebt Herr Harkness nicht an, für welchen der Werte er sich entscheide.

Im Vorstehenden haben wir die Litteratur über den Gegenstand, den wir jetzt näher discutieren wollen, dargestellt, wir müssen nun daran gehen, die lunare Gleichung so umzuformen, dass sie zu einer Bestimmung von π tauglich wird. Wir werden dann die in ihr auftretenden Constanten bestimmen, den Unterschied zwischen den Autoren aufzuklären versuchen, und schliesslich prüfen, zu welcher Bestimmang vor allen die lunare Gleichung am günstigsten ist.

Ist R der Radius des Erdäquators, so definieren wir als Sinus der mittleren Horizontal-Aequatorealparallaxe der Sonne $\sin \pi = \frac{R}{a}$, der entsprechende Ausdruck für den Mond ist $\sin Q = \frac{R}{a^1}$, es ist wohl zu merken, dass im Nenner dieser Ausdrücke nur die halbe grosse Axe der Bahn steht und kein Factor, der irgend welche Glieder der Excentricität der Bahn enthält. Die lunare Gleichung hatte auf der rechten Seite den Quotienten $\frac{\delta^1}{r}$, dieser wird somit $\frac{\delta^1}{r} = \frac{\sin \pi}{\sin Q} \frac{\frac{a}{r}}{\frac{a^1}{\delta^1}}$

wie bekannt, lässt sich $\frac{a}{r}$ in eine Reihe fortschreitend nach Cosinus der Vielfachen der mittleren oder der wahren Anomalie entwicklen, dasselbe gilt von $\frac{a^1}{\delta^1}$; welche Entwicklung wir anwenden, ist vor der Hand gleichgültig; tragen wir den Ausdruck oben in die lunare Gleichung ein, so wird sie

$$\delta\lambda \sin 1'' = \frac{\sin \pi}{\sin Q} \frac{\mu}{1+\mu} \left\{ \frac{\frac{a}{r}}{\frac{a^1}{\delta^1}} \sin (\mathbb{C} - \odot) \cos b^1 \right\}$$ der Ausdruck

in der Klammer ist variabel, während die andern Factoren rechts alle constant sind. $\delta\lambda$ ist, wie erwähnt, das Increment der heliocentrischen Länge der Erde, welche durch die lunare Gleichung um diesen Winkelbetrag verändert wird. Da π etwa $8''.8$ beträgt, können wir wie oben bei $\sin \delta\lambda$, setzen $\sin \pi = \pi \sin 1''$. Bezeichnen wir dann den constanten Teil der rechten Seite mit P, so wird

$$P = \frac{\pi}{\sin Q} \frac{\mu}{1+\mu} \text{ und } \delta\lambda = P \left\{ \frac{\frac{a}{r}}{\frac{a^1}{\delta^1}} \sin (\mathbb{C} - \odot) \cos b^1 \right\}$$

Aus einer langen Reihe von Sonnenbeobachtungen, die ja $\delta\lambda$ liefern, weil die Länge der Erde $= 180 + \odot$ ist, hat Le Verrier mit Hülfe dieser Gleichung P bestimmt, indem er für jedes Beobachtungsdatum den variablen Teil, der eingeklammert ist, berechnete. Er fand so $P = 6''.50$; nachdem P gefunden war, löste Le Verrier die Gleichung oben für π auf, also $\pi = \frac{R}{a^1} P \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)$ und bestimmte π, jedoch giebt er die Gleichung nicht in dieser expliciten Form, sondern setzt ohne weitere Erläuterungen $\pi = 0.01662\ P \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)$ und sagt von diesem numerischen Factor nur: „Le facteur numérique qui entre dans le second membre dépend de la parallaxe de la Lune, et on peut le considérer comme connu dans les limites de l'exactitude qui doit comporter la détermination de la par-

allaxe du Soleil (Annales tome IV. pag 100, 101). Da besonders in diesem Factor die spätern Autoren von Le Verrier und untereinander abweichen, diese aber alle wie auch Le Verrier von der Constanten der Parallaxe des Mondes ausgehen, wollen wir die Berechnung von $\frac{R}{a^1}$ ausführlich darstellen und zugleich die Beziehungen von $\frac{R}{a^1}$ zur Constanten der Mondparallaxe discutieren.

I. Die Bestimmung von $\frac{R}{a^1}$.

Die Mondparallaxe $\sin q = \frac{R}{\delta^1} = \frac{R}{a^1} \cdot \frac{a^1}{\delta^1}$ enthält rechts den constanten Factor $\frac{R}{a^1}$ und den im allgemeinen variablen Factor $\frac{a^1}{\delta^1}$, dessen Entwicklung nach Cosinus der Vielfachen der mittlern Anomalie des Mondes, der mittlern Anomalie der Sonne, der mittlern Elongation des Mondes von der Sonne etc. fortschreitet; wir erhalten nun, wenn die Argumente dieser Winkel 0 sind, auch einen constanten Teil von $\frac{a^1}{\delta^1}$, der mit F bezeichnet werden möge, alsdann verstehe ich unter der Constanten des sinus der Parallaxe, wir wollen sie durch C (sin q) künftighin darstellen, $C(\sin q) = \frac{R}{a^1} . F$, dieser Factor F ist aus der Theorie bekannt und eine Funktion φ (U, e^2, e^{12}, g). Hierin ist $U = \frac{n^1}{n} = 0.07480133$ das Verhältnis der siderischen Umlaufszeit des Mondes zu der der Erde, e, e^1 sind die Excentricitäten der Erd- und Mondbahn, g ist nahezu der sinus der halben Neigung der Mondbahn zur Ekliptik. Bemerken müssen wir hier noch, was späterhin von Wichtigkeit sein wird, dass wir die Constante des sinus der Parallaxe wohl zu unterscheiden haben von der Constanten der Paxallaxe selbst, diese ist um 0″.16 grösser als jene.

Aus der Gleichung $C(\sin q) = \frac{R}{a^1} . F$ kann man, wenn

C (sinq) und F bekannt sind, $\frac{R}{a^1}$ finden, dieselbe Grösse $\frac{R}{a^1}$ ist uns aber auch noch auf anderem Wege zugänglich, wir können sie auch aus der Vergleichung der Pendelmessungen mit der siderischen Umlaufszeit des Mondes herleiten. Auf beide Methoden $\frac{R}{a^1}$ zu finden wollen wir hier eingehen

1. Bestimmung von $\frac{R}{a^1}$ aus der Constanten des sinus der Mondparallaxe:

Zunächst müssen wir nun darlegen, wie man C (sin q) zu bestimmen vermag. Hansen und Adams haben in ihren Mondentwicklungen aus der Theorie einen Wert von C (sin q) in der Weise hergeleitet, dass sie $\frac{R}{a^1}$ durch die Pendelmessungen bestimmten und dazu den Factor F, der aus ihren Entwicklungen von $\frac{a^1}{\delta^1}$ folgte, fügten, so fanden beide, unabhängig von einander, nach einer Verbesserung des Hansenschen Wertes durch Newcomb C (sin q) = 3422″. 3. Dieser Wert konnte nun direct durch Beobachtungen von Mond-Declinationen an zwei verschiedenen Beobachtungsorten geprüft werden, indem man die Beobachtungen auf denselben Zeitmoment reducierte, und durch eine Anzahl von Bestimmungsgleichungen, die man so erhielt, musste sich eine Correction für die zur Berechnung der betreffenden Mondorte verwandte Constante ergeben.

Aus Beobachtungen am Cap der guten Hoffnung in Verbindung mit gleichzeitigen in Greenwich und Cambridge suchte Henderson diese Constante abzuleiten, fand aber je nachdem, ob er die Mondtafeln von Burkhardt oder die von Damoiseau zu Grunde legte, Wertbeträge, die um 1″. 3 von einander abwichen; im Mittel aus beiden Partialwerten glaubte er dann eine verlässliche Bestimmung zu erhalten, die lange Zeit allgemein adoptiert wurde (Memoirs of the R. A. S. Band X). In einem sehr geistvollen Aufsatze im Nautical Almanac for 1856 (übersetzt von Encke, Berliner Jahrbuch 1856) „On

new tables of the moon's parallax" zeigte nun Prof. Adams, dass der angegebene Henderson'sche Wert falsch sei, da sowohl die Damoiseau'schen wie Burkhardt'schen Tafeln starke Ungenauigkeiten enthielten, die besonders in den Tafeln des letztern beträchtlich waren und jene Differenz oben bedingten. Nach Correction der fehlerhaften Angaben dieser Werke und nach einer Discussion der Henderson'schen Angaben fand Adams so den Wert von 3422″. 32, der in bewundernswerter Weise mit dem Werte 3422″. 31, welcher der Theorie zu Grunde lag, übereinstimmte. Neuere Beobachtungen am Cap der guten Hoffnung in Verbindung mit solchen in Europa haben nach den Discussionen von Herrn Breen (Memoirs of the R. A. S. XXXII) und Herrn Stone (Ibid. XXXIV) eine positive Correction dieses Wertes sehr wahrscheinlich gemacht, doch kann man einen präcisen Wert für C (sin q) aus beiden Abhandlungen nicht entnehmen, weil, wie Herr Newcomb (Astronomical Papers prepared etc., Bd. I 1882 pag. 79) gezeigt hat, bei beiden eine Verwechselung der Constanten des sinus der Parallaxe mit der Constanten der Parallaxe selbst vorgekommen ist. Um nun ein möglichst verlässliches Resultat zu erhalten, hat Herr Newcomb angenommen, dass die von Herrn Breen erhaltene Correction von $\mp$ 0″. 38 sich auf die vorläufige Annahme desselben von C (Parallaxe) = 3422″. 40 beziehe, dann wird C (Parallaxe) = 3422 . 78

C (sin q) = 3422 . 62

dieselbe Überlegung giebt bei Herrn Stone

C (Parallaxe) = 3422 . 86

C (sin q) = 3422 . 70

Im Mittel werden wir daher C (sin q) = 3422″. 7 ansetzen können.

Professor Adams, auf dessen Angaben über die Mondparallaxe sich die erwähnten Autoren beziehen, hat nun für die Constante F einen sehr genauen analytischen Ausdruck gegeben (Monthly Notices, Band 38 pag. 472), er führt die Entwicklung bis zur neunten Potenz in U und den Producten e U, e' U etc.

Für uns genügt es hier, bis zur fünften Potenz zu gehen, dann wird

$$F = 1 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\,e^2\right) U^2 - \frac{179}{288}\,U^4 - \frac{97}{48}\,U^5.$$

Hierin ist $U = 0.07480133$
$e = 0.01677106$
$e^1 = 0.05489930$

so wird $\lg F = 0.000395$, und wenn

$C (\sin q) = 3422''.7$ ist, wird $\frac{R}{a^1} = 0.016578$, wenn

$C (\sin q) = 3422.3$ ist, wird $\frac{R}{a^1} = 0.016576$

das Mittel aus beiden Werten: $\frac{R}{a^1} = 0.016577$ wird sicher dann höchstens um eine Einheit der sechsten Stelle fehlerhaft sein können, wie man auch C (sin q) wählen mag. Es wird practisch sein, für $\frac{R}{a^1}$ noch einen Controllwert auf anderem Wege abzuleiten, zumal wir bei der Bestimmung von μ von den Daten, die wir jetzt entwickeln wollen, Gebrauch machen werden, daher gehen wir jetzt über zu der

2) Bestimmung von $\frac{R}{a^1}$ aus den Pendelmessungen in Verbindung mit der siderischen Umlaufszeit des Mondes.

Das Pendelgesetz lautet $t = \pi \sqrt{\frac{p_0}{g}}$, hierin ist p_0 die Länge eines Pendels, welches in der geographischen Breite φ in der Zeit t eine Schwingung machen würde, wenn keine Centrifugalkraft vorhanden wäre, g ist die zu φ gehörige Schwerkraft, für welche der Ausdruck gilt $g = \frac{k^2 m}{R^2_\varphi}$, wo R_φ der für die Breite φ geltende Erdradius, k^2 die Gaussische Constante und m die Erdmasse ist. Setzt man diesen Ausdruck in die erste Gleichung und quadriert dieselbe, so wird $k^2 m = \frac{\pi^2 R^2_\varphi p_0}{t^2}$, multipliciert man die entsprechenden Seiten dieser Gleichung mit der Identität $1 = \frac{a^{1\,3}}{a^{1\,3}}$, so wird

$$(1)\quad k^2 m = \left(\frac{R_\varphi}{a^1}\right)^3 \frac{a^{1\,3}\,\pi^2\,p_0}{R_\varphi \cdot t^2}$$

wenn nun n^1 die mittlere siderische Bewegung des Mondes ist, wird $2\pi = n^1 T^1$ (2), wo T^1 die siderische Umlaufszeit des Mondes darstellt. Nach Kepplers Gesetz ist andrerseits

$$(3)\quad a^{1\,3}\, n^{1\,2} = k^2\,(m + m^1),$$

werden die Werte aus den Gleichungen (2) und (3) in (1) eingetragen, so folgt

$$(4)\quad k^2\, m = \left(\frac{R_\varphi}{a^1}\right)^3 \frac{k^2\,(m + m^1)\, T^{1\,2}\, p_0}{R_\varphi\; 4\, t^2}$$

also

$$(5)\quad \frac{R_\varphi}{a^1} = \left\{ \frac{1}{1+\mu}\, \frac{R_\varphi}{p_0}\, \frac{4\, t^2}{T^{1\,2}} \right\}^{1/3}$$

dieser Ausdruck gilt allgemein für jede Breite φ, wir wählen nun im speciellen Falle diejenige Breite, für welche der sinus Breite $= \sqrt{\frac{1}{3}}$ ist, nun ist der Ausdruck für $p_0 = 0^m.990941 + 0^m.005176 \sin^2\varphi$, hier wird also $p_0{}^1 = 0^m.992666$. Dieser Wert ist noch von der Wirkung der Centrifugalkraft zu befreien, das Verhältnis des verticalen Teiles der Centrifugalkraft zur Schwere ist nahe $\frac{4\,R}{p_0{}^1\, T^2} \cos^2\varphi$*), wo T die Umdrehungszeit der Erde in mittleren Secunden ist, hier wird dieser Ausdruck $= \frac{1}{433\,.\,86}$ und somit

$$p_\varphi = 0\,.\,992666 \left(\frac{434\,.\,86}{433\,.\,86}\right)$$

nach Breen ist nun $R_\varphi = 6370063$ m, $\mu = \frac{1}{81\,.\,2}$ $T^1 = 2360592^s$, mit diesen Werten wird dann $\frac{R}{a^1} = 0\,.\,016577$ also genau dem obigen Werte entsprechend. Wir haben nun hier schon für μ einen Wert angenommen, bei dessen näherer Darlegung wir jetzt etwas verweilen wollen.

II. Die Bestimmung der Mondmasse μ.

Um diese Grösse zu bestimmen, hat uns die Natur vorwiegend drei Hülfsmittel an die Hand gegeben: 1 Das Ebbe-

*) Cf. Hansen, Astronomische Nachrichten Bd. XVII, 300.

Flut-Phänomen. 2) Die Präcessions- und Nutations-Erscheinung. 3) Die Bewegung des Erdcentrums um den Schwerpunkt des Systems Erde-Mond. Natürlich haben wir hier nur von den beiden ersten Bestimmungsmethoden zu handeln.

1. Die Bestimmung von μ aus dem Gezeiten-Phänomen.

Die erste Bestimmung dieser Art machte Newton, er fand als Wert $\mu = \frac{1}{40}$, später bildete Laplace Newton's Theorie weiter aus und stellte Glieder in Rechnung, die Newton bei seinem viel primitiveren Calcul entgangen waren, sein schliesslicher Wert aus Beobachtungen im Brester Hafen ergab $\mu = \frac{1}{75}$.

In den fünfziger Jahren nahm Haughton neue Bestimmungen vor und in neuester Zeit von 1870 bis 1883 revidierte Herr Ferrel die Arbeiten seiner Vorgänger und fügte die Bearbeitung neuer Beobachtungen hinzu, cf. Harkness: The Solar Parallax and its related constants Washington Observations for 1885 published 1891. In dieser Arbeit hat Herr Harkness die Ferrel'schen Angaben nochmals eingehend discutiert und noch andere Beobachtungen herangezogen, er findet im Mittel

$$\mu = \frac{1}{81.07 \pm 0.24}$$

Dieses Resultat ist nahe übereinstimmend mit den Ergebnissen der zweiten Methode, auf die wir hier näher eingehen wollen, weil sie die genausten Resultate zu liefern vermag.

2. Bestimmung von μ aus der Präcessions- und Nutations-Erscheinung.

In den Differentialgleichungen der Rotationsbewegung der Erde tritt ebenso wie bei denen der Translationsbewegung eine Störungsfunction auf, deren Hauptglieder hier natürlich durch Mond und Sonne gebildet werden; das Verhältnis der störenden Kräfte dieser beiden Körper zu einander sei mit ε

bezeichnet, dann wird $\varepsilon = \frac{\mu\ q_0^{\ 3}}{M_1\ \pi^3}$, wo jetzt die Sonnenmasse M_1 auch in Einheiten der Erdmasse ausgedrückt ist.

a) Herr Tisserand giebt im zweiten Bande seiner mécanique céleste pag. 441 die einfachste Methode an, durch welche man aus dieser Gleichung bei gegebenem ε, das aus der Präcession und Nutation unmittelbar bestimmbar ist, μ berechnen kann. Nach dem dritten Gesetz von Keppler ist

$$k^2\ (1 + \mu) = n^{1\ 2}\ r^{1\ 3}$$
$$k^2\ M_1 \quad\ = n^2\ \ r^3$$

wo n und n^1 die mittlern Bewegungen von Erde und Mond in einem julianischen Jahre sind. In Teilen des Radius ausgedrückt ist $n = 6.28308$

$n^1 = 83.99685$

$$\frac{r^{\ 3}}{r^{1\ 3}} = \left(\frac{n^1}{n}\right)^2 \frac{M_1}{1+\mu}, \text{ nun ist } \varepsilon = \frac{\mu}{M^1}\ \frac{r^3}{r^{1\ 3}},$$

also wird $\varepsilon = \left(\frac{n^1}{n}\right)^2 \frac{\mu}{1+\mu}$. Herr Tisserand giebt nun an

$$\varepsilon = 2.1758\ (1 - 3.150\ \eta + 3.1586)$$

wo η und σ kleine etwaige Fehler in der Bestimmung der Präcessionsconstanten β und Nutationsconstanten N sind, es ist

$$\beta = 50''.3714$$
$$N = 9''.223$$

mit diesen Werten ergiebt sich $\mu = \frac{(1 + 3.1586 - 3.150\ \eta)}{81.14}$

$= \frac{1}{81.14}$

Herr Tisserand findet, wohl infolge eines rechnerischen Versehens fälschlich $\frac{(1 + 3.1586 - 3.150\ \eta)}{82.87}$. Damit mein Wert von $\mu = \frac{1}{81.14}$ controllierbar sei, setze ich die kurze logarithmische Rechnung hier mit an:

lg	n^1	$= 1.924263$
„	n	$= 0.798173$
„	$\frac{n^1}{n}$	1.126090
„	$\left(\frac{n^1}{n}\right)^2$	2.252180
„	ε	0.337619
„	$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)$	1.914561

$$\text{Num}\left(1+\frac{1}{\mu}\right) = 82.14 \quad \text{daher } \mu = \frac{1}{81.14}$$

Wenn man übrigens die Angaben von Herrn Stone $\varepsilon = 2.1749$ $\beta = 50''.378$ (dieser Wert ist in der That der genauere) hier verwertet, so wird $\mu = \frac{1}{81.17}$, diesen Wert wollen wir im Folgenden als den bestbestimmten festhalten, er stimmt auch mit dem Wert von Newcomb $\frac{1}{81.08}$ sehr gut überein, den dieser Autor aus derselben Gleichung nur auf anderm Wege abgeleitet hat. Man kann nämlich die Gleichung $\varepsilon = \frac{\mu\, q_0^3}{M^1 \pi^3}$ noch anders behandeln:

b) Wir hatten oben die Gleichung:

$$k^2\, m = \frac{\pi^2\, R^2\varphi \,.\, p_0}{t^2}$$

führen wir nun hier jetzt die mittlere Sonnen-Parallaxe ein, indem wir die Gleichung gliedweise mit $1 = \frac{a^3}{a^3}$ multiplicieren und gleichzeitig setzen $\sin \pi_\varphi = \frac{R_\varphi}{a}$ $2\pi = n\,T$, deren Bedeutungen aus dem frühern hier unmittelbar klar ist, so wird $k^2\, m = (\sin \pi_\varphi)^3 \frac{a^3\, n^2\, T^2\, p_0}{4\, t^2\, R_\varphi}$. Bezeichnet nun a_1 die zur ungestörten elliptischen Bewegung gehörige halbe grosse Axe, während, wie stillschweigend angenommen ist, a die halbe

grosse Axe bei Berücksichtigung der Störungen in n ist, so gilt $a_1^3\, n^2 = k^2\, (M + m)$.

Le Verrier giebt an

$$a_1 = 1.000\ 141\ a$$

(cf. Annales de l'Observ. tome II pag. 60). Diese Werte ergeben, wenn sie in die obige Gleichung eingesetzt werden,

$$k^2\, m = (\sin \pi_\varphi)^3 \cdot \frac{k^2\, (M + m)\, T^2\, p_0}{4\, t^2\, R_\varphi}\, (1.000143)^3$$

$$\text{hieraus } \frac{M + m}{m}\, \pi^3{}_\varphi = \frac{4\, t^2\, R_\varphi}{T^2 \cdot p_0 \cdot \sin^3 1''}\, (1.000143)^3$$

wählen wir φ wieder so wie oben, so dass also $\sin \varphi = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ist, so wird

$$p_\varphi = 0.992666\, \frac{434.86}{433.86} \quad t = 1,$$

$R_\varphi = 6\ 370063$ m, die Umlaufszeit ist $T = 31\ 558\ 149^s$, diese Werte, in die letzte Gleichung eingesetzt, bestimmen $\frac{M + m}{m}\, \pi^3{}_\varphi$; da nun der Aequatoreal-Radius der Erde R mit dem Radius R_φ nach Hansen (Astr. Nachr. XVII pag. 300) durch die Gleichung verbunden ist:

$$\lg \frac{R_\varphi}{R} = 9.9995166,$$

$$\text{wird } \lg \left(\pi^3 \frac{M + m}{m}\right) = \lg \left(\pi^3{}_\varphi\, \frac{M + m}{m}\, \frac{1}{(0.998887)^2}\right),$$

$$\text{wir erhalten so } \lg \left(\frac{M + m}{m}\, \pi^3\right) = 8.35478.$$

Dieser Wert stimmt gut mit dem Werte 8.35475 von Herrn E. J. Stone überein. Newcombs Wert, dessen Ableitung aus seinen Angaben nicht zu ersehen ist, denn er sagt nur „the observed length of seconds pendulum compared with the sidereal year gives 8.35488", ist etwas abweichend von unsern Angaben, die Annahme von Le Verrier aber

$= 8 . 35199$ ist fraglos falsch. Legen wir nun unsern Wert oben zu Grunde, nehmen $\varepsilon = 2 . 1749$

$\beta = 50 . ''378$ an, entsprechend den besten Angaben, so wird $\mu = \frac{1}{81 . 45.}$

Herr Stone hat $\mu = \frac{1}{81 . 46}$; in unseren wie in seinen Entwicklungen ist hier aber nur das Quadrat der Excentricität e^1 und der Neigung der Mondbahn zur Ekliptik γ bei der Bestimmung von ε mitgenommen; werden die Entwicklungen bis zum dritten Grad ausgedehnt, so findet Herr Stone (l. c. pag. 43):

$$\mu = \frac{1}{81 . 36}.$$

Newcombs Wert $\frac{1}{81 . 1}$ basierte nun auch auf einer Entwicklung von ε, die bis zur 3. Potenz von γ und e^1 aufstieg, diese Verschiedenheit der Resultate verschwindet nicht, auch wenn man dieselben Werte für $\frac{q_0''}{M\pi^3}$ annimmt, sie muss also in der Entwicklung von ε ihren Grund haben.

Da Newcomb seine Entwicklung garnicht, Herr Stone nur seine End-Resultate angiebt, konnte der Grund dieser Verschiedenheit nicht aufgedeckt werden, die dazu nötigen Entwicklungen würden uns hier auch zu weit vom Thema entfernt haben, ich behalte mir eine spätere Untersuchung dieses Gegenstandes vor. — Da die Ableitung a) von μ, wie sie Herr Tisserand giebt, ungleich genauer ist, als die eben erläuterte, wollen wir $\mu = \frac{1}{81 . 17}$, das wir oben bei Benutzung der neueren Angaben gefunden haben, als den wahrscheinlichsten Wert festhalten.

Wir haben nun alle Elemente der lunaren Gleichung discutiert, mit Ausnahme von P, über dessen Bestimmung aus Beobachtungen das dritte Capitel handeln soll, wir wollen nun untersuchen, worin der Unterschied zwischen Le Verrier und Newcomb in der Bestimmung von π seinen Grund hat,

hierzu aber müssen wir die differentielle Abhängigkeit von π von den einzelnen Factoren, die in die Bestimmungsgleichung eingehen, prüfen. Da Le Verrier und Newcomb auf der rechten Seite der Gleichung für π statt $\frac{R}{a^1}$ die Constante der Parallaxe multipliciert mit einem Factor F^1 stehen haben, setzen wir auch unsere Gleichung in dieser Form an, also:

$$\pi = F^1 \,.\, q_0 \,\sin 1'' \,P \left(1 + \frac{1}{\mu}\right),$$

wir haben hier C (Parallaxe) $= q_0$ gesetzt; die Gleichung hätte die richtige Form, wenn $F = F^1$ wäre, dies ist aber bei den einzelnen Autoren durchaus nicht der Fall. Die Constanten, deren Veränderung auf π Einfluss haben wird, sind F^1, q_0, P, μ; μ aber ist eine Function von $(M\pi^3)$, q_0 und ε, und da ε, wie erwähnt, von der Präcessionsconstanten β und der Nutationsconstanten N, sowie von zwei Factoren C_1 und C_2, welche Functionen der Excentricitäten der Erd- und Mondbahn und der Neigung der Mondbahn zur Ekliptik sind, abhängt, kann man setzen:

$$\pi = f\,(F^1,\ q_0,\ P;\ S,\ \beta,\ N,\ C_1,\ C_2),$$

wo $S = M\pi^3$ gesetzt ist: vermöge seiner Ableitung muss dies als Constante für sich betrachtet werden.

Um die partiellen Differentialquotienten von π nach diesen Grössen zu finden, differenziere ich unsere Gleichung total:

$$d\pi = dF^1 \,.\, q_0 \,\sin 1'' \,P \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) + d\,q_0\,F^1 \sin 1''\,P \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) .$$

$$+ dP.F^1\,q_0 \sin 1''\,P \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) + d\left(\frac{1}{\mu}\right) F^1 \,.\, q_0 \sin 1''\,P;$$

setzen wir in unsere Gleichung den Wert von $\mu = \varepsilon \frac{S}{q_0^3}$ ein und differenziren direct nach ε, S und nochmals nach q_0, so werden die einzelnen partiellen Differentialquotienten folgende Werte annehmen, deren numerische Beträge basierend auf

den Angaben Le Verrier's für die Constanten rechts beigefügt sind:

Diff.-quotient	analytischer Ausdruck	numerischer Betrag
$\frac{\partial \pi}{\partial F} =$	$+ P \sin 1'' \, q_0 \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)$	$= + 8.89$
$\frac{\partial \pi}{\partial q_0} =$	$+ P \cdot F^1 \sin 1'' \left(1 + \frac{4}{\mu}\right)$	$= + 0.01$
$\frac{\partial \pi}{\partial P} =$	$+ F^1 \sin 1'' \, q_0 \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)$	$= + 1.37$
$\frac{\partial \pi}{\partial S} =$	$- P \cdot F^1 \sin 1'' \, q_0 \frac{1}{\mu S}$	$= - 0.00000004$
$\frac{\partial \pi}{\partial \varepsilon} =$	$- P \cdot F^1 \sin 1'' \, q_0 \frac{1}{\mu \varepsilon}$	$= - 4.03$

Von $\frac{\partial \pi}{\partial \varepsilon}$ müssen wir übergehen zu $\frac{\partial \pi}{\partial \beta}$, $\frac{\partial \pi}{\partial N}$, $\frac{\partial \pi}{\partial C_1}$, $\frac{\partial \pi}{\partial C_2}$

es ist nun $\varepsilon = \frac{\mu \cdot q_0^3}{S}$, ε selbst wird bestimmt aus den beiden Gleichungen

$$(1) \quad \beta = b_1 \, k + b_2 \, k \, \varepsilon$$
$$(2) \quad N = \quad b_3 \, k \, \varepsilon$$

hierbei ist $k = \frac{3 \, n^2}{4 \, \sigma} \, \frac{2 \, C - A - B}{C}$

A, B, C sind die Hauptträgheitsmomente der Erde, n die mittlere tägliche Translationsgrösse, σ die mittlere tägliche Rotationsgrösse

$$b_1 = 1 + \frac{3}{2} e^2 \qquad b_2 = 1 + \frac{3}{2} e^{12} - 6 \, g^2$$

$$b_3 = \frac{2 \, g}{\nu} \left(1 + \frac{3}{2} e^{12} - \frac{5}{2} g^2\right)$$

g ist Delaunays Constante, die nahe $= \sin \frac{\gamma}{2}$ ist, wenn γ die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik bezeichnet.

ν ist die Bewegung des Mondknotens in einem julianischen Jahre.

In b_1, b_2, b_3 sind die Glieder, abhängig von den dritten Potenzen in e, e^1 und g vernachlässigt. Aus den Gleichungen (1) und (2) erhält man

$$\frac{\beta}{N} = \frac{b_1}{b_3}\frac{1}{\varepsilon} + \frac{b_2}{b_3} = C_1\frac{1}{\varepsilon} + C_2, \text{ also } \varepsilon = \frac{C_1}{\beta/N - C_2}$$

$$\varepsilon = \frac{C_1 N}{\beta - NC_2}$$ bilden wir nun die partiellen Differentialquotienten von ε nach β, N, C_1, C_2, so wird:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta} = -\frac{C_1 N}{(\beta - NC_2)^2} = -\frac{\varepsilon^2}{C_1 N}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial N} = \frac{C_1 \beta}{(\beta - NC_2)^2} = \frac{\beta \varepsilon^2}{C_1 N^2}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial C_1} = \frac{N}{\beta - NC_2} = \frac{\varepsilon}{C_1}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial C_2} = \frac{C_1 N^2}{(\beta - NC_2)^2} = \frac{\varepsilon^2}{C_1}$$

mit Benutzung von $\frac{\partial \pi}{\partial \varepsilon}$ können wir aus diesen Werten sogleich $\frac{\partial \pi}{\partial \beta}$, $\frac{\partial \pi}{\partial N}$, $\frac{\partial \pi}{\partial C_1}$, $\frac{\partial \pi}{\partial C_2}$, finden deren numerische Werte wir in nachfolgendem Täfelchen unter Benutzung der Le Verrierschen Constanten angeben:

Differentialquotient	analytischer Ausdruck	numerischer Betrag
$\frac{\partial \pi}{\partial \beta}$	$-\frac{\partial \pi}{\partial \varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{C^2 N}$	$= +\ 0.55$
$\frac{\partial \pi}{\partial N}$	$+\frac{\partial \pi}{\partial \varepsilon}\frac{\beta . \varepsilon^2}{C_1 N^2}$	$= -\ 3.02$
$\frac{\partial \pi}{\partial C_1}$	$+\frac{\partial \pi}{\partial \varepsilon}\frac{\varepsilon}{C_1}$	$= -\ 2.34$
$\frac{\partial \pi}{\partial C_2}$	$+\frac{\partial \pi}{\partial \varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{C_1}$	$= -\ 5.11$

Nach der Verbesserung des Le Verrier'schen Versehens durch Herrn Stone ist

nach Le Verrier $\pi = 8''.91$, während
nach Newcomb $\pi = 8''.81$ beträgt;

diese Differenz von $0''.10$ haben wir nun im Folgenden zu erklären.

Le Verrier und ebenso Herr Stone setzen die lunare Gleichung an in der Form

$$\pi = 0.01662\ P\left(1 + \frac{1}{\mu}\right),$$

aber Newcomb hat $\pi = 0.016461\ P\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)$,

ausserdem ist nun noch die Form von Herrn Harkness zu erwähnen, dieser hat

$$\pi = 0.0164564\ P\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)$$

alle drei Autoren weichen also in dem numerischen Factor von einander ab, (wir hatten übrigens $\pi = 0.016577\ P\left[1 + \frac{1}{\mu}\right]$). Die richtige Form aber war $\pi = q_0 \sin 1''\ F\ P\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)$ und so musste erfüllt sein $q_0 \sin 1''\ F = \frac{R}{a^1}$.

Le Verrier scheint nun angenommen zu haben, dass der mathematische Ausdruck für q_0 sei $q_0 = \frac{R}{a^1\left(1 + \frac{e^{1\,2}}{2}\right)}$ und hat daher in der lunaren Gleichung, wo nur $\frac{R}{a^1}$ vorkommt, gesetzt: $\frac{R}{a^1} = q_0\left(1 + \frac{e^{1\,2}}{2},\right)$ so macht es wenigstens Herr Stone in Oxford, wie ich aus seiner gütigen brieflichen Antwort auf meine dahin gehende Anfrage erfahren habe, er findet so übereinstimmend mit Le Verrier 0.01662, in der That, es ist lg sin $(3422.3) = 8.219873 - 10$

$$\lg F^1 = \lg\left[1 + \frac{e^{1\,2}}{2}\right] = 0.000655$$
$$8.220528 - 10.$$

hierzu ist der Numerus 0.016616 oder abgekürzt 0.01662.

Bei Newcomb ist die Sache complicierter, sein Factor 0 . 016461 stimmt sehr nahe überein mit 0 . 016464 = $\frac{R_\varphi}{a^1}$, wo die Bedeutung aus dem Früheren bekannt ist, diesen Wert giebt Hansen in seiner früher citierten Arbeit pag. 300 an. Mir scheint es nicht unwahrscheinlich, dass bei Newcomb eine Verwechslung von R_φ mit R vorliegt, zumal da er in einer späteren Schrift (Transformation of Hansens Theory) diese Verwechslung offenbar gemacht hat, denn hier citiert er Hansens Ausdruck für die Horizontal-Aequatoreal-Parallaxe, setzt aber dort, wo Hansen unzweideutig R_φ hat, R. Herr Stone erklärt die Abweichung Newcoms von Le Verrier durch die Worte: „because Mr. Newcomb has employed the mean longitudes instead of the true." (Monthly Notices, Band XXVIII, pag. 25).

Herr Harkness schliesslich hat als Factor 0 . 0164564, der Weg, auf dem er denselben gefunden hat, ist ein nicht ganz einwurfsfreier. Er geht aus von der ursprünglichen Gleichung:

$$d\lambda = \frac{\mu}{1+\mu} \frac{\sin \pi}{\sin q} \frac{\cos b \sin (\mathbb{C} - \odot)}{\sin 1''}$$

und sein Gedankengang ist folgender:

„Wenn eine grössere Anzahl von beobachteten Werten von $d\lambda$, die sich über mehrere Mondumläufe erstrecken, vorliegen, so wird hierbei $d\lambda$ immer andere und andere Werte haben, deren Mittel die Constante der lunaren Gleichung sein wird, dann wird auch π verschiedene Werte annehmen, deren Mittel die Constante der Sonnenparallaxe sein wird, die Mondbreiten werden im Mittel = 0 sein, also $\cos b^1 = 1$. Mit q (der jeweiligen Mondparallaxe) liegt die Sache anders. q ist gleich der lunaren Parallaxe plus einer Reihe von Gliedern, welche mit Factoren multiplicirt sind, die abhängen von der mittleren Anomalie der Sonne, der mittleren Anomalie des Mondes, der mittleren Entfernung des Mondes von dem aufsteigenden Knoten und von der Differenz der mittleren Längen von Sonne und Mond. Mit Ausnahme

dieses letzten Gliedes werden die anderen Glieder alle nur möglichen Werte annehmen und im Mittel verschwinden. Also wird das Mittel der q sein $q = q_0 +$ Glieder, die von der Differenz $\mathbb{C} - \odot$ abhängen. Nach dem zweiten Bande der Theorie des Mondes von Delaunay finden wir, dass dann nur Term (27) $= 28''.1788 \cos (2\,\mathbb{C} - 2\odot)$ zu q_0 zu fügen ist, $2\,\mathbb{C} - 2\odot$ ist $= 180^0$, da alle unsere Beobachtungen nach unserer Annahme bei $\mathbb{C} - \odot = 90^0$ gemacht sind. $q - 28''.18$ ist $= 3394''.52$, somit wird:

$$\pi = 0.0164564\ P \left[1 + \frac{1}{\mu}\right].$$

Hierzu ist zu bemerken, dass die Annahme, die Beobachtungen immer nur bei $\mathbb{C} - \odot = 90^0$ zu machen, in praxi unmöglich ist, aber gesetzt auch, diese wäre erfüllbar, weshalb sollen dann die von der Anomalie der Sonne und des Mondes abhängigen Glieder verschwinden, weshalb soll das Mittel der jeweiligen Sonnenparallaxen wirklich die mittlere Sonnenparallaxe sein? Das wäre doch höchstens der Fall, wenn die halbe grosse Axe $a = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r\,dt$ wäre, oder in Worten, wenn a das Mittel aus einer sehr grossen Zahl von Radien vectoren wäre. Ueberdies hätte Herr Harkness doch eine andere Constante der lunaren Gleichung annehmen müssen, als die Le Verrier'sche, da diese doch auf einem andern Wege gefunden ist.

Gehen wir nun weiter auf die Werte der einzelnen Factoren ein, welche Le Verrier und welche Newcomb angewandt haben. Le Verrier hat $q_0 = 3422''.3$, dagegen Newcomb $3422''.7$, den neueren Stone'schen Bestimmungen entsprechend, doch macht dieser Unterschied bei der Auswertung von π nichts aus, da der Uebergangsfactor 0.01 ist.

Bei der Mondmasse ist die Differenz zwischen Le Verrier, welcher $\frac{1}{81.48}$ und Newcomb, der $\frac{1}{81.08}$ hat, sehr beträchtlich, sie ist bedingt durch zweierlei: 1. die beiden

Autoren weichen im Werte von S, wie erwähnt, stark ab. 2. Le Verrier geht bei der Bestimmung von ε nur bis zu dem Quadrat von e^1 und γ, Newcomb aber bis zu den dritten Potenzen. — Die andere starke Abweichung ist dann noch bei F^1 Le Verrier hat 1 . 0018, Newcomb aber 0 . 9921. Die Constante P ist dort 6″ . 50, hier 6″ . 52. In der folgenden Tabelle sind in der ersten Columne alle Abweichungen in den Constanten zwischen Le Verrier und Newcomb im Sinne Newcomb — Le Verrier, in der zweiten Columne die Differentialquotienten $\frac{\partial \pi}{\partial A_i}$ und in der dritten das Product dieser beiden Grössen angegeben, die Summe der letzten Reihe ergiebt $\pi_{N.} - \pi_{L.V.} = -0''.10$, also genau übereinstimmend mit dem in den Endresultaten stattfindenden Unterschied.

δA_i	$\frac{\partial \pi}{\partial A_i}$	$\delta A_i \frac{\partial \pi}{\partial A_i}$
$\delta \beta = +0.''007$	$+0.55$	$+0.''004$
$\delta N = -0.007$	-3.02	$+21$
$\delta C_1 = +0.001$	-2.34	-2
$\delta C_2 = +0.002$	-5.11	-10
$\delta F^1 = -0.0097$	$+8.89$	-86
$\delta S = +1500000$	-0.00000004	-60
$\delta q_0 = +0.4$	$+0.01$	$+3$
$\delta P = +0.02$	$+1.37$	$+27$
	$\pi_N - \pi_L =$	$-0.''102$

Aus der zweiten Columne können wir direct ersehen, ob es practisch ist, die Sonnenparallaxe aus der lunaren Gleichung zu bestimmen, da $\frac{\partial \pi}{\partial N} = -3.02$ der wahrscheinliche Fehler von N, $\delta N = \pm 0.15$ ist, so involviert dieses eine Unsicherheit von 0.045 in der Bestimmung von π, δP ist etwa 0.″02, da $\frac{\partial \pi}{\partial P} = 1.4$ ist, wird daraus eine Unsicherheit von 0.″03 bei der Bestimmung von π.

Somit werden wir aus der lunaren Gleichung niemals eine zuverlässige Bestimmung von π erwarten können.

Welche Grösse bestimmt sich nun am vorteilhaftesten aus der lunaren Gleichung? Differenzieren wir, um diese Frage zu beantworten unsere Gleichung $\pi = \sin Q \; P \left[1 + \frac{1}{\mu}\right]$

$$\text{total, so wird } d\pi = \cos Q \; P \left[1 + \frac{1}{\mu}\right] dQ$$

$$+ \sin Q \left[1 + \frac{1}{\mu}\right] dP - \sin Q \frac{P}{\mu^2} d\mu$$

berechnen wir die Coefficienten, so folgt

$$d\pi = 536\, dQ + 1.37\, dP - 715\, d\mu,$$

darnach wird sich also μ am besten aus der lunaren Gleichung berechnen lassen, weil der Coefficient von $d\mu$ der grösste ist.

Nun wird

$$\frac{d\mu}{\mu} = dP \frac{\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\mu}{P} - d\pi \frac{\mu}{\sin Q \cdot P} + dQ \frac{\cos Q \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\mu}{\sin Q}$$

ausgewertet:

$$\frac{d\mu}{\mu} = 0.2\, dP - \frac{1}{8{,}8} d\pi + 61.0\, dQ$$

wo $\left.\begin{matrix} dP \\ d\pi \\ dQ \end{matrix}\right\}$ in Einheiten von 0″.01 ausgedrückt sind.

Es wird also aus der ursprünglichen Gleichung folgen $\frac{1}{\mu} = \frac{\pi}{\frac{R}{a^1}} \frac{1}{P} - 1$ nehmen wir $\pi = 8.″78$ $P = 6.″52$ und

$\lg \frac{R}{a^1} = 8.219393 - 10$ so folgt $\mu = \frac{1}{80.2}$ dieser Wert weicht stark von jenem Werte $\mu = \frac{1}{81.17}$ ab, den wir aus der Präcessions- und Nutations-Constanten ermittelt haben, vielleicht spricht er dafür, dass $\pi = 8''.78$ zu klein ist.

Capitel III.

Bestimmung der Constanten der lunaren Gleichung aus Beobachtungen.

Le Verrier hatte bei der Berechnung seiner Sonnentafeln, als es sich darum handelte, zu den ihm vorliegenden Beobachtungen die berechneten Oerter darzustellen, um dann Correctionen der Elemente der Bahn zu erhalten, die Constante der lunaren Gleichung $P = 6''.00$ angenommen, entsprechend den Angaben seiner Vorgänger. Da die Periode der lunaren Gleichung kurz ist, konnte ein Fehler in der Grösse dieser Constanten bei der Discussion der Beobachtungen, die sich über viele Jahrr erstreckten, natürlich keinen merklichen Einfluss auf die Bestimmung der Elemente der Erdbahn haben. Um nun einen genauen Wert für P abzuleiten, discutierte Le Verrier die Sonnenbeobachtungen zur Zeit der Quadratur des Mondes, und wenn die lunare Gleichung sich wenigstens zu $3''.8$ in absolutem Betrag erhob, noch einmal. Aus einer sehr grossen Anzahl von Sonnenbeobachtungen, die sich vom Jahre 1816—1850 mit wenigen Unterbrechungen erstrecken, fand Le Verrier $P = 6''.50 \pm 0''.03$.

An diese Beobachtungen hat später Newcomb weitere angeschlossen und discutiert (cf. Appendix II zu Astronomical and meteorological Observations Washington 1867), diese umfassen Beobachtungen von Washington und Greenwich, von denen sich die ersteren über 14, die letzteren über 5 Jahre erstrecken. Indem Newcomb seine Resultate mit den Ergebnissen von Le Verrier verbindet, erhält er $P = 6''.520 \pm 0''.023$.

Le Verrier und Newcomb haben lediglich aus Sonnenbeobachtungen P bestimmt, da aber die Dimensionen der Bahn des Erdmittelpunkts um den Schwerpunkt des Erde-Mond-Systems sich in allen Planetenbeobachtnngen spiegeln müssen, die sich über einige Mondumläufe erstrecken, so kann man P auch aus Planeten-Beobachtungen bestimmen. Eine solche Beobachtungsreihe liegt nun vor in den Marsoppositionsbeobachtungen, welche Herr Gill in Ascension Island unter einer Breite von -8^0, welche einer Declination des Mars von -9^0 günstig entsprach, im Jahre 1877 in der Zeit vom 31. Juli bis 3. October vornahm. Der Tag der Opposition in Rectascension war der 5. September 1877, der also nahezu in der Mitte dieser Beobachtungsreihe lag. Die Discussion der Beobachtungen ist in einem besonderen Bande der Memoirs of the Royal Astronomical Society Vol. XLVI 1880-81 von Herrn Gill herausgegeben. Die Beobachtungen sollten zur Bestimmung der Sonnenparallaxe π, welche sich $= 8''.78 \pm 0''.012$ ergab, dienen. Mit dem Heliometer wurde der Planet an eine Reihe vorher ausgewählter Vergleichssterne angeschlossen, die durch Beobachtungen von etwa zwölf Sternwarten vorher aufs beste bestimmt waren. Die durch das Heliometer beobachtete Distanz D_b des Marscentrums von einem jeden der Vergleichsterne wurde mit der entsprechenden berechneten Distanz D_r verglichen die Differenz $D_b - D_r$ ergab dann eine Correction für die Parallaxe, welche bei der Berechnung von D_r zu Grunde gelegt war, sowie Verbesserungen der Rectascension und Declination des Mars, in Verbindung mit Correctionsgrössen für die Refractionstafeln, Instrumentalangaben etc. . . Die Bedingungsgleichungen erhielten somit die Form:

$$f'.\ \triangle\alpha + f''.\ \triangle\delta + f'''.\ \triangle\pi = \triangle_b - \triangle_r + \text{Correctionen.}$$

Nachdem Herr Gill in den obigen Gleichungen den Einfluss von $\triangle\pi$ und den der Correctionen, welche auf der rechten Seite der Gleichung auftreten, in Rechnung gestellt hat, bildete er eine Reihe von Normalgleichungen zur Bestimmung der $\triangle\alpha$ und $\triangle\delta$. Nach der Zeit geordnet zeigte sich, dass die $\triangle\delta$ einen guten Gang hatten, während die $\triangle\alpha$

Werte durchaus kein stetiges und gesetzmässiges Verhalten aufwiesen, der Autor sagt darüber pag. 143:

„This is the more remarkable, since the arrangement of the comparison stars was made with a view to determine the Right Ascensions rigidly and the determination of R. A. therefore come out with much greater numerical weight than the Declinations."

Er sucht dieses eigenthümliche Verhalten der $\Delta\alpha$ durch eine der drei folgenden Ursachen zu erklären:

1. Die Rectascensionen der Sternorte sind weniger genau, als die Declinationen bestimmt.
2. Die heliometrischen Distanzmessungen werden in der Richtung des Positionswinkels 0^0 und 180^0 genauer, als rechtwinklig zu dieser Richtung.
3. Es giebt wirkliche tabulare Fehlerquellen, die sich nicht nach Potenzen der Zeit entwickeln lassen.

Nachdem Herr Gill die Wahrscheinlichkeit dieser drei Fehlerursachen gegen hinander abgewogen hat, macht er drei Annahmen, um die $\Delta\alpha$ darzustellen:

1. durch Annahme eines constanten Factors,
2. durch die Form $\Delta\alpha = a + bt + ct^2$ ($t = 0$ entspricht dem 5. September, dem Tage der Opposition).
3. durch die Form $\Delta\alpha = a + bt + ct^2 + d \sin (u + u_0)$,

Hierbei ergeben sich die wahrscheinlichen Fehler:

ad 1. ± 0.285 die Periode bei der letzten Annahme war
2. ± 0.261
3. ± 0.199, $u = \frac{t \cdot 360}{13^d.626}$,

zu dieser Periode bemerkt Herr Gill:

„It is worthy of remark that the period in R. A. (13. 626 days) is curiously close to that of a term depending on twice the Moons mean longitude but J confess, J can find no cause for such a perturbation."

An dieser Stelle setzte ich nun auf den gütigen Rat von Herrn Professor Dr. Foerster ein und untersuchte, ob die $\Delta\alpha$ sich besser darstellen liessen, wenn man ein Correctionsglied für die Constante der lunaren Gleichung, die nach den

von Herrn Gill angewandten Le Verrier'schen Tafeln $= 6''.50$ angenommen war, einführte, neben Correctionsgliedern für die heliocentrischen Mars und Erdorte, aus denen sich ja, die zu der berechneten Distanz Mars-Stern verwandten geocentrischen Marscoordinaten zusammensetzten. Ganz abgesehen davon, ob die Darstellung der $\Delta\alpha$ günstiger wurde, oder nicht, musste aus den trefflichen Beobachtungen des Herrn Gill eine verhältnissmässig sehr zuverlässige Bestimmung der lunaren Constante sich ergeben, zumal da diese Marsbeobachtungen von den grossen systematischen Fehlerquellen frei sein mussten, die bei den Beobachtungen der Sonne sich so störend bemerkbar machen.

$\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ beziehen sich auf den Aequator, die Coordinaten in den Le Verrier'schen Tafeln, um deren Correctionen es sich handelt, haben aber als Hauptebene die Ekliptik, es wird daher nöthig, erst die geocentrischen Marscorrectionen in Länge und Breite, dl und db in Function der Correctionen der heliocentrischen Längen- und Breiten-Correctionen auszudrücken und dann dl und db in $d\alpha$ und $d\delta$ zu verwandeln. Nennt man die heliocentrischen Coordinaten des Systemschwerpunktes S R^1, $\odot^1$, B^1 und sind Δ, l, b die geocentrischen Marscoordinaten, während ϱ, λ, β die heliocentrischen Coordinaten des Mars sind, bezeichnen ausserdem P, $\mathbb{C}$, b^1 die geocentrischen Coordinaten von S, so wird:

1. $\Delta \cos b \cos l = \varrho \cos\beta \cos\lambda - R^1 \cos B^1 \cos\odot^1 - P \cos b^1 \cos\mathbb{C}$
2. $\Delta \cos b \sin l = \varrho \cos\beta \sin\lambda - R^1 \cos B^1 \sin\odot^1 - P \cos b^1 \sin\mathbb{C}$
3. $\Delta \sin b \quad = \varrho \sin\beta \quad - R^1 \sin B^1 \quad - P \sin b^1$

differenziert man diese Gleichungen total, indem nur b^1 und $\mathbb{C}$ als constant betrachtet werden, so wird:

$$\Delta l = f_1 \ (d\varrho,\ d\lambda,\ d\beta;\ dR^1,\ d\odot^1,\ dB^1,\ dP)$$
$$\Delta b = f_2 \ (d\varrho,\ d\lambda.\ d\beta;\ dR^1,\ d\odot^1,\ dB^1,\ dP)$$

1a) $d\Delta \cos b \cos l - db\ \Delta \sin b \cos l - dl\ \Delta \sos b \sin l =$
$+ d\varrho \cos\beta \cos\lambda \quad - dR^1 \cos B^1 \cos\odot^1 \quad - dP \cos\mathbb{C} \cos b^1$
$- d\beta\ \varrho \sin\beta \cos\lambda \quad + dB^1 R^1 \sin B^1 \cos\odot^1$
$- d\lambda\ \varrho \cos\beta \sin\lambda \quad + d\odot^1 R^1 \cos B^1 \sin\odot^1;$

2a) $d\Delta \cos b \sin l - db\,\Delta \sin b \sin l + dl\Delta \cos b \cos l =$
$+ d\varrho \cos\beta \sin\lambda - dR^1 \cos B^1 \sin \odot^1 - dP \cos \mathbb{C} \sin b^1$
$- d\beta\,\varrho \sin\beta \sin\lambda - dB^1 \sin B^1 \sin \odot^1$
$+ d\lambda\,\varrho \cos\beta \cos\lambda + d\odot^1 R^1 \cos B^1 \cos \odot^1,$

multipliciert man 1a mit $-\sin l$ und 2a mit $\cos l$ und addirt, so wird

I. $dl\,\Delta \cos b = - d\varrho \cos\beta \sin(l-\lambda) + dR^1 \cos B^1 \sin(l-\odot^1)$
$+ dP \cos b^1 \sin(l-\mathbb{C})$
$+ d\beta\,\varrho \sin\beta \sin(l-\lambda) - dB^1 R^1 \sin B^1 \sin(l-\odot^1)$
$+ d\lambda\,\varrho \cos\beta \sin(l-\lambda) - d\odot^1 R^1 \cos B^1 \sin(l-\odot^1),$

auf ähnliche Weise findet man, mit Benutzung der entsprechenden Gleichung, 3a.

II. $db\,.\,\Delta = d\varrho \{ \sin\beta \cos b - \cos\beta \sin b \sin(l-\lambda) \}$
$- dR^1 \{ \sin B^1 \cos b - \cos B^1 \sin b \cos(l-\odot^1) \}$
$- dP \{ \sin b^1 \cos b - \cos b^1 \sin b \cos(l-\mathbb{C}) \}$
$+ d\beta\,.\,\varrho \{ \cos\beta \cos b + \sin\beta \sin b \cos(l-\lambda) \}$
$- dB^1 R^1 \{ \cos B \cos b + \sin B^1 \sin b \sin(l-\odot) \}$
$- d\lambda\,\varrho \cos\beta \sin b \sin(l-\lambda + d\odot^1 R^1 \cos B^1 \sin b \sin(l-\odot^1).$

Da es uns vornehmlich auf die Bestimmung von dP ankommt, wollen wir hier nur die $\Delta\alpha$ Gleichungen discutieren, denn es liegt ja in der Natur der Sache, dass nur diese uns einen Wert dP mit verhältnismässig grossem Gewicht ergeben werden. Es ist nun

$$a)\ dl = \frac{\partial l}{\partial \varrho} d\varrho + \frac{\partial l}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial l}{\partial \beta} . d\beta + \frac{\partial l}{\partial R^1} dR^1 + \frac{\partial l}{\partial \odot^1} d\odot^1 + \frac{\partial l}{\partial B^1} dB^1 + \frac{\partial l}{\partial P} dP$$

$$b)\ db = \frac{\partial b}{\partial \varrho} d\varrho + \frac{\partial b}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial b}{\partial \beta} . d\beta + \frac{\partial b}{\partial R^1} dR^1 + \frac{\partial b}{\partial \odot^1} d\odot^1 + \frac{\partial b}{\partial B^1} dB^1 + \frac{\partial b}{\partial P} dP.$$

Haben wir die Werte von dl und db gefunden, so können wir zur Bestimmung von $d\alpha$ übergehen durch die Gleichung

$$A)\ d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial l} . dl + \frac{\partial \alpha}{\partial b} . db$$

Wir haben also zunächst die partiellen Differentialquotienten, welche in den Gleichungen (a) und (b) vorkommen, und die aus den frühern Gleichungen I und II unmittelbar sich ergeben, zu bestimmen und dann noch dieselben resp. mit $\frac{\partial \alpha}{\partial l}$ und $\frac{\partial \alpha}{\partial b}$ zu multiplicieren, um so die rechte Seite der $d\alpha$ Gleichungen zu erhalten. Le Verrier hat im 1. Bande der Annales de l'Observatoire de Paris pag. 161 gezeigt, dass sich $\frac{\partial \alpha}{\partial l}$ und $\frac{\partial \alpha}{\partial b}$ sehr einfach aus dem Dreieck P Π S ergeben, wo P der Acquatoreal-, Π der Eklipticalpol, S ein beliebiger Stern ist, mit den Coordinaten α u δ, resp λ und β, der Winkel bei S heisse w, dann wird

$$\frac{\partial \alpha}{\partial l} = \frac{\cos \beta}{\cos \delta} \cos w$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial b} = -\frac{\sin w}{\cos \delta}$$

Es lagen nun im ganzen 23 $\triangle \alpha$ Werte vor — wir wollen die numerischen aus der Beobachtung folgenden $d\alpha$ Werte mit $\triangle \alpha$ bezeichnen — von denen indessen nur 21 zur Berechnung benutzt wurden, da in zwei Fällen nach Herrn Gills Angaben andere Beobachtungsmethoden als bei den übrigen befolgt waren. Für diese Werte, die zu bestimmten Zeitmomenten gehörten, wurden die rechten Seiten nach der Gleichung A) berechnet und es waren aus ihnen also im ganzen 7 Unbekannte zu bestimmen, diese 21 Gleichungen sind folgende:

	$\Delta\alpha$	a	b	c	a_1	b_1	d	e
1.	— 0.″21	= 2.501 dλ	— 1.287 dβ	— 0.913 dϱ	— 1.574 d$\odot^1$	— 0.912 dB^1	+ 1.409 dR^1	— 0.387 dP
2.	— 0.34	= 2.680	— 1.333	— 0.859	— 1.754	— 0.952	+ 1.340	— 2.081
3.	— 0.05	= 2.898	— 1.390	— 0.743	— 1.968	— 0.994	+ 1.206	+ 0.306
4.	— 0.14	= 2.991	— 1.411	— 0.678	— 2.063	— 1.011	+ 1.127	+ 1.631
5.	— 0.48	= 3.032	— 1.419	— 0.647	— 2.104	— 1.018	+ 1.089	+ 2.016
6.	+ 0.25	= 3.066	— 1.424	— 0.621	— 2.138	— 1.023	+ 1.056	+ 2.199
7.	+ 0.84	= 3.158	— 1.443	— 0.534	— 2.230	— 1.038	+ 0.947	+ 2.121
8.	+ 0.90	= 3.220	— 1.476	— 0.470	— 2.291	— 1.047	+ 0.865	+ 1.457
9.	+ 0.10	= 3.298	— 1.480	— 0.368	— 2.365	— 1.057	+ 0.731	+ 1.776
10.	— 0.02	= 3.394	— 1.489	— 0.187	— 2.460	— 1.066	+ 0.489	— 1.972
11.	+ 0.73	= 3.450	— 1.453	+ 0.086	— 2.514	— 1.060	+ 0.066	— 0.923
12.	+ 0.80	= 3.450	— 1.448	+ 0.122	— 2.514	— 1.057	+ 0.059	— 0.394
13.	+ 0.65	= 3.449	— 1.448	+ 0.123	— 2.513	— 1.057	+ 0.057	— 0.375
14.	+ 0.47	= 3.446	— 1.443	+ 0.160	— 2.508	— 1.053	+ 0.002	+ 0.250
15.	+ 0.16	= 3.439	— 1.437	+ 0.196	— 2.505	— 1.051	— 0.050	+ 0.843
16.	— 0.18	= 3.439	— 1.437	+ 0.200	— 2.500	— 1.050	— 0.055	+ 0.899
17.	+ 0.42	= 3.435	— 1.431	+ 0.238	— 2.498	— 1.047	— 0.110	+ 1.437
18.	+ 0.23	= 3.428	— 1.427	+ 0.263	— 2.489	— 1.044	— 0.148	+ 1.744
19.	+ 0.21	= 3.420	— 1.423	+ 0.287	— 2.482	— 1.040	— 0.181	+ 1.972
20.	— 0.17	= 3.031	— 1.269	+ 0.740	— 2.038	— 0.930	— 0.881	— 2.068
21.	+ 0.74	= 2.778	— 1.189	+ 0.857	— 1.833	— 0.873	— 1.087	— 0.356

alle Zahlen sind Numeri.

Die allgemeine Form dieser Gleichungen ist also $\triangle \alpha_i = a_i\, d\lambda + b_i\, d\beta + c_i\, d\varrho + a^1_i\, d\odot^1 + b^1_i\, dB^1 + d_i\, dR^1 + e_i\, dP$ wir werden sogleich sehen, warum wir die Coefficienten von $d\odot^1$ und dB^1 mit a^1 und b^1, abweichend von der Bezeichnung der übrigen benannt haben. Da es uns wenig auf die Bestimmung von $d\odot^1$, dB^1, dR^1 ankam, wurde versucht, ob man die Zahl der Unbekannten nicht durch geschickte Verbindung jener Grössen mit $d\lambda$, $d\beta$, $d\varrho$ zu reduzieren vermöchte, indem als neue Unbekannte eingeführt würden

$x = d\lambda + L\, d\odot^1 \quad y = d\beta + M\, dB^1 \quad z = d\varrho + N\, dR^1$

dies wäre möglich, wenn in obigen 21 Gleichungen die Verhältnisse $\frac{a^1}{a}, \frac{b^1}{b}, \frac{d}{c}$ nahezu constant blieben. In der That ist dies bei $\frac{a^1}{a}$ und $\frac{b^1}{b}$ der Fall, während $\frac{d}{c}$ in den Gleichungen sehr von einander verschiedene Werte annahm. Auf diese angedeutete Form gebracht, wurde die Gestalt der Gleichung

$$\triangle \alpha_i = a_i \left(d\lambda + \frac{a^1_i}{a_i}\, d\odot^1\right) + b_i \left(d\beta + \frac{b^1_i}{b_i}\, dB^1\right) + c_i\, d\varrho + d_i\, dR^1 + e_i\, dP$$

Wir bildeten nun den Mittelwert aller $\frac{a^1_i}{a_i}$ und $\frac{b^1_i}{b_i}$ und setzen $L = \frac{\sum_1^n \frac{a^1_i}{a_i}}{m}$ $M = \frac{\sum_1^n \frac{b^1_i}{b_i}}{m}$ wo $m = 21$ die Anzahl der Gleichungen darstellt, aus der Rechnung ergab sich $L = -0.700$, $M = +0.720$, da es nicht darauf ankam, die ganz genauen Mittelwerte zu verwenden, wurden diese runden Werte, welche die Rechnung erleichterten, gewählt und die neuen Unbekannten hatten somit die Form

$$x = d\lambda - 0.700\, d\odot^1$$
$$y = d\beta + 0.702\, dB^1$$

daher wird

$\triangle \alpha_i = a_i\, x + b_i\, y + c_i\, d\varrho + d_i\, dR^1 + e_i\, dP$

wir brauchen die so erhaltenen Gleichungen hier nicht explicite hinzuschreiben, da sie sich unmittelbar aus den frühern

21 Gleichungen ergeben, wenn man x statt $d\lambda$, y statt $d\beta$ setzt und die Glieder, welche dB^1 und $d\odot^1$ enthalten, weglässt. Natürlich ist durch die Einführung von x und y ein Fehler begangen, doch sind die Vernachlässigungen in dB^1 und $d\odot^1$ verhältnismässig so gering, dass dadurch die Bestimmung von dP nicht alteriert wird. Nach der Methode der kleinsten Quadrate sind aus den 21 Gleichungen mit 5 Unbekannten folgende 5 Normalgleichungen abgeleitet, für welche wir die allgemein übliche Schreibform gewählt haben:

215.493 x	− 94.635 y	− 7.301 $d\varrho$	+ 23.446 dR^1	+ 34.046 dP	= + 16.683
+ 41.714	+ 4.037	− 11.449	− 15.063	= −	7.046
	+ 5.696	− 8.434	− 4.220	= +	0.905
		+ 13.266	+ 8.236	= −	0.230
			+ 45.928	= +	3.803

Die Auflösung dieser Gleichungen ergab die Werte der Unbekannten:

$$x = - 0.''076$$
$$y = + 0.''128$$
$$d\varrho = + 0.000025$$
$$dR = + 0.000017$$
$$dP = + 0.''029$$

setzt man diese Werte in die ursprüngliche Gleichungen mit 5 Unbekannten ein und bildet $R - B = v$, so ergiebt sich $\Sigma (v\,v) = 2.9852$, die Anzahl m der Gleichungen war 21, die der Unbekannten $n = 5$, also wird $m - n = 16$ $\frac{\Sigma (v\,v)}{m - n} = 0.1859$.

Der mittlere Fehler des absoluten Gliedes einer Bedingungsgleichung ist nun $\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma (v\,v)}{m - n}}$ und der wahrscheinliche Fehler $r = 0.06745 \cdot \varepsilon$, wir erhalten hier $\varepsilon = 0.431$ $r = 0.291$.

Wir haben nun noch den wahrscheinlichen Fehler der Bestimmung von dP zu suchen, nennen wir denselben r_P, so ist $r_P = \frac{r}{\sqrt{p_P}}$ wo p_P das Gewicht von dP bezeichnet, dieses ist = 36.857, daher wird $r_P = \pm 0.''048$ und wir erhalten somit $P = P_0 + dP \pm r_P = 6.''53 \pm 0.''05$. Und hiermit

sind wir zum Ziel unserer Rechnung gelangt. Der wahrscheinliche Fehler $r_P = \pm 0.''05$, den die Marsbeobachtungen, welche sich nur über zwei Monate erstreckten, ergeben haben, ist im Verhältnis zu dem wahrscheinlichen Fehler von $\pm 0.''03$, welchen Le Verrier für P aus den Sonnenbeobachtungen, die mehr denn 30 Jahre umfassten, gezogen hat, so unverhältnismässig gering, wenn man die Länge der beiden Bestimmungsreihen erwägt, dass wir daraus mit Sicherheit den Schluss ziehen können: zur Bestimmung der Constanten der lunaren Gleichung sind längere Reihen von Mars- oder Venusbeobachtungen viel geeigneter und zuverlässiger als viele Jahre lange Sonnenbeobachtungen, bei denen die systematischen Fehlerquellen eine feinere Wertbestimmung unmöglich machen.

Was nun die Güte der Darstellung der $\Delta\alpha$ Gleichungen betrifft, so ist sie ungefähr dieselbe, wie sie Herr Gill durch die Form $\Delta\alpha = a + bt + ct^2$ erreicht hat, der wahrscheinliche Fehler einer Rectascensionsbestimmung ist bei uns $r = \pm 0.''29$ während oben Herr Gill $r = \pm 0.26$ fand. In wie weit sich die Periode von 13.626 Tagen bestätigte, ist nicht weiter untersucht worden, denn einmal lag dies weit ausserhalb des Rahmens der vorgestreckten Abhandlung und dann war diese Frage auch aus dem Material, welches Herr Gill durch den Druck veröffentlicht hat, nicht zu entscheiden möglich.

Wahrscheinlich wird sich diese Periode zurückführen lassen auf eine Ungenauigkeit in der Anbringung der Nutation bei der Berechnung der Marsorte, doch lässt sich dieses ohne Einsicht in das Original-Manuscript, welches in London deponiert ist, nicht feststellen.

Fassen wir zum Schluss die Resultate unserer Untersuchungen kurz zusammen, so können wir dieselben folgendermaassen präcisieren:

1. Die analytische Form der lunaren Gleichung ist

$$\pi = \frac{R}{a^1} P \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \text{ oder numerisch}$$

$$\pi = 0.016\,577\, P \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)$$

2. Die lunare Gleichung ist nicht zu einer Bestimmung von π geeignet, sondern vermag nur zu einer Bestimmung der Mondmasse zu dienen

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\pi}{\frac{R}{a^1}} \frac{1}{P} - 1$$

3. Die Constante P wird am besten aus Mars- oder Venusbeobachtungen, die sich über eine längere Zeit erstrecken, bestimmt, Sonnenbebachtungen sind viel ungeeigneter hierzu, weil die systematischen Fahlerquellen, mit denen dieselben unbedingt verbunden sind, die Sicherheit der Bestimmung stark trüben.

4. Sowohl aus den Newcomb'schen Bestimmungen von P als aus unsern folgt eine Vergrösserung des Le Verrier'schen Wertes von 6.″50 um etwa + 0.″02.

Zum Schlusse sei es mir vergönnt, Herrn Professor Dr. W. Foerster für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie für die gütige Unterstützung, die mir bei der Abfassung derselben Herr Professor hat zu Teil werden lassen, an dieser Stelle meinen ergebenen Dank auszusprechen.

THESEN.

I.

Der Winkelbetrag, unter dem von der Sonne aus gesehen die Bewegung des Erdmittelpunktes um den Schwerpunkt des Systems Erde-Mond erscheint, kann vorteilhafter zu einer Bestimmung der Nutations-Constanten als zu einer Berechnung der Sonnenparallaxe verwertet werden.

II.

Unter den Meteorbahnen sind die beiden verschiedenen Gruppen, nämlich diejenigen, deren Excentricität kleiner als 1 (Ellipsen, Grenzfall Parabeln) und diejenigen, deren Excentricität grösser als 1 ist (Hyperbeln) auch in Bezug auf den Ursprung streng von einander zu scheiden.

III.

Die Untersuchungen von G. H. Darwin über den auch die Bahnen verändernden Einfluss der Gestaltänderungen, welche die Himmelskörper unter der Wirkung der Massenanziehung erfahren, sowie die in neuester Zeit von T. J. J. See in Bezug auf die Doppelsternsysteme ausgeführten ähnlichen Untersuchungen sind für die Cosmogenie von grösster Bedeutung.

Curtius Laves de vita sua.

Natus sum, Curtius Laves, Masoviorum in urbe Lyck, quae urbs sita est in extremis imperii nostri finibus, qui spectant in septentrionem et orientem solem, huius saeculi anno LXVI a. d. IX. Kal. Sept., patre Hermanno, qui adhuc munere fungitur in illius urbis gymnasio magistri. Fidei addictus sum evangelicae Per novem annos eiusdem scholae usus disciplina, perfunctus maturitatis examine anno Domini MDCCCLXXXVI Regimontium Borussorum in universitatem litterarum clarissimam Albertinam commigravi, ubi bis sex menses studiis et mathematicis et physicis operam dedi. Cum autem semper animum induxissem ad sublimiora illa studia, quae in perlustrandis cognoscendisque sideribus eorumque motibus versantur, facere me non posse arbitratus sum, quin Berolinum quoque adirem. Ubi in album academicum receptus rectore viro praeclarissimo Vahlen sex semestria scholis interfui praeceptorum illustrissimorum ordinis philosophici huius universitatis. Plurimum vero operae laborisque mihi videor consumpsisse in exercitationibus seminarii astronomici cuius socius fui per quinque semestria, Neque minus gaudeo contigisse mihi, ut duce viro doctissimo Foerster motus siderum observitarem in specula, quam dicunt astronomica. Magistri clarissimi docuerunt me in Albertina universitate:

Hurwitz, Lindemann, Pape, Rahts, Saalschütz, Walter; in Berolinensi universitate:

Assmann, von Bezold, du Bois Reymond, Dieterici, Dilthey, Foerster, Fuchs, Helmert, von Helmholtz, Hettner, Knoblauch, Kronecker, Kundt, Lehmann-Filhès, Netto, Pernet, Tietjen, Weinstein, Zeller.

Omnibus quos supra dixi viris optime de me meritis, in primis autem viris illustrissimis Foerster et Tietjen ex animi sententia gratias ago quam plurimas et semper animum gratum piumque servabo.